Subject ________ الصفحة الأولى التاريخ: ________

Date ________ الموضوع: ________

((حل التمارين (الوظيفة) في المحاضرة الثالثة))

1 : $I = \int (1 - x^2) \ln x \, dx$

* نستخدم التكامل بالتجزئة *

نجزئ $u = \ln x \Leftarrow du = \frac{1}{x} dx$ ، اشتقاق

$dv = 1 - x^2 \Leftarrow V = x - \frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow I = u.v - \int v \, du$.

$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - \int (x - \frac{x^3}{3}) \frac{1}{x} dx$

$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - \int (x \frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} \frac{1}{x}) dx$

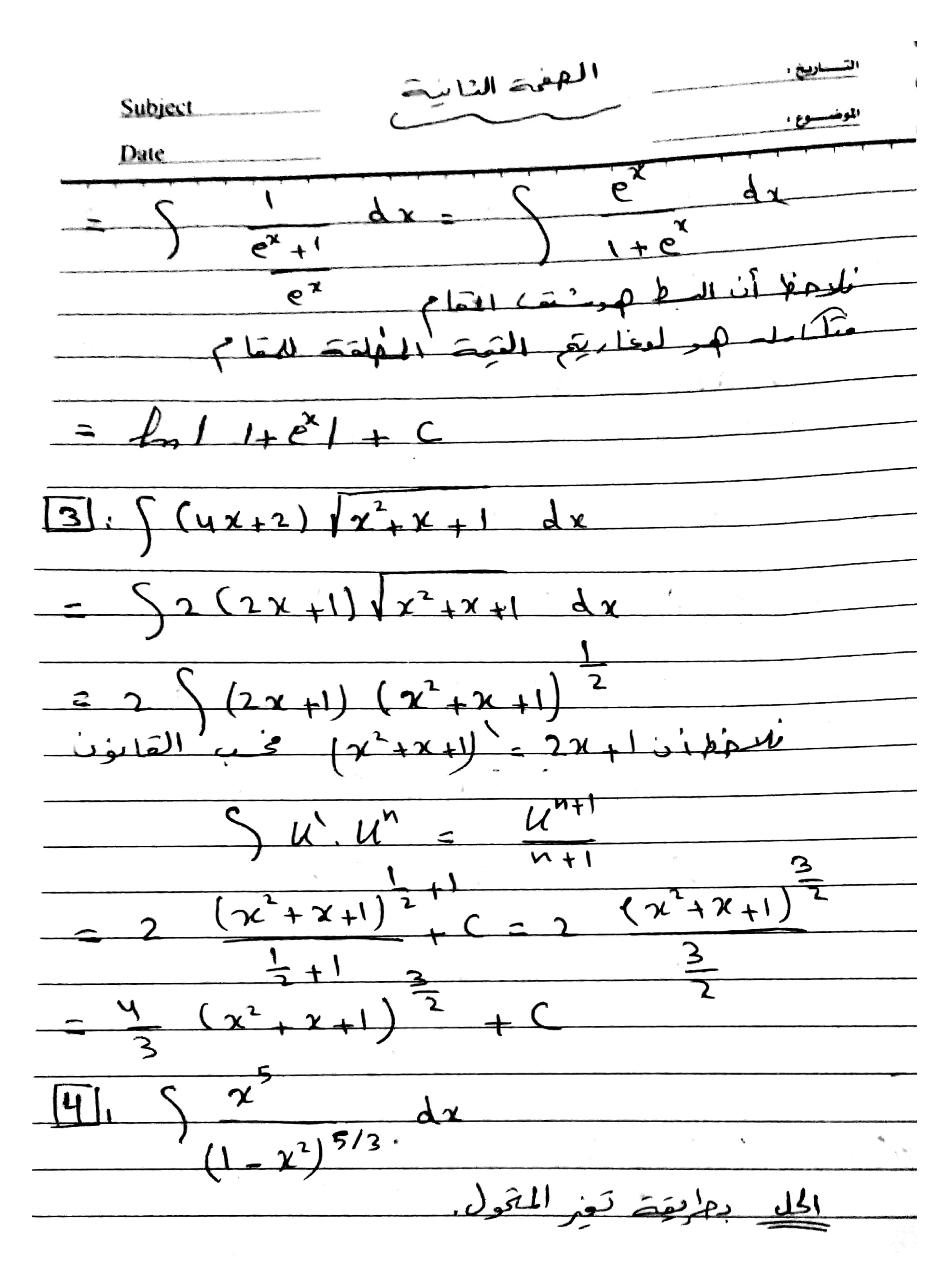
$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - \int (1 - \frac{x^2}{3}) dx$

$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - \int 1 \, dx + \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$

$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - x + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$

$= (x - \frac{x^3}{3}) \ln x - x + \frac{1}{9} x^3 + C$

2 : $I = \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx$



Subject

Date

الصفحة الثانية

التاريخ :

الموضوع :

$$= \int \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} \, dx = \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx$$

نلاحظ أن البسط هو مشتق المقام

فتكامله هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

$$= \ln | 1 + e^x | + C$$

3 : $\int (4x + 2) \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx$

$$= \int 2 (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx$$

$$= 2 \int (2x + 1) (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

نلاحظ أن $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$ حسب القانون

$$\int u' . u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$= 2 \frac{(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = 2 \frac{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

4 , $\int \frac{x^5}{(1 - x^2)^{5/3}} \, dx$

الحل بطريقة تغير المتحول.

Scanned by CamScanner

الصفحة الثالثة

Subject
Date

التاريخ :
الموضوع :

نفرض $1 - x^2 = t \Rightarrow dt = -2x\,dx$

نعوض ولدينا $x^2 = 1 - t \Rightarrow x = \sqrt{1-t}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x^4 \cdot x}{(t)^{5/3}}\,dx$$

نضرب ونقسم على -2

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x^4 \cdot (-2x\,dx)}{(t)^{5/3}}$$

ونعلم أن $dt = -2x\,dx$

و $x^2 = 1 - t \Rightarrow x^4 = (1-t)^2$

نعوض في التكامل

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{(t)^{5/3}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1 - 2t + t^2}{t^{5/3}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{5/3}}\,dt - 2\int \frac{t}{t^{5/3}}\,dt + \int \frac{t^2}{t^{5/3}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-5/3}\,dt - 2\int t^{-2/3}\,dt + \int t^{\frac{1}{3}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t^{-2/3}}{-2/3}\right) - 2\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}}{1/3}\right) + \frac{t^{4/3}}{4/3} + C$$

Subject ______ الوصفة الرابعة التاريخ :
Date ______ الموضوع :

5 : $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

نفرض $x = a.\text{ch}t \Rightarrow dx = a.\text{sh}t\, dt$

نعوض

$I = \int \sqrt{a^2 \text{ch}^2 t - a^2}\; a.\text{sh}t\, dt$

$= \int \sqrt{a^2(\text{ch}^2 t - 1)}\; a.\text{sh}t\, dt$

$= \int \sqrt{a^2(\text{sh}^2 t)}\; a.\text{sh}t\, dt$

حيث أن $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$

$\Rightarrow \text{sh}^2 t = \text{ch}^2 t - 1$

$= \int a.\text{sh}t.a.\text{sh}t\, dt = a^2 \int \text{sh}^2 t\, dt$

$= a^2 \int \frac{1 - \text{ch}2t}{2}\, dt = a^2 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{ch}2t}{2}\right) dt$

$= \frac{a^2}{2} \int (1 - \text{ch}2t)\, dt$

$= \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{\text{sh}2t}{2}\right) + C$

ونعلم أن $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \text{sh}2t = 2\,\text{sh}t\,\text{ch}t$

$\Rightarrow \frac{\text{sh}2t}{2} = \text{sh}t\,\text{ch}t$

المرفق الخامس

Subject ....

Date ....

التاريخ :

الموضوع :

$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}(t - sht\, cht) + C$

ونعلم أن $t = \operatorname{arcsh}\frac{x}{a}$

ولدينا $cht = \frac{x}{a}$ ، ونعلم أن

$sh^2t = ch^2t - 1 \Rightarrow sht = \sqrt{ch^2t - 1}$

$= \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$

$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{2} sht\, cht + C$

$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsh}\frac{x}{a} - \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + C$

$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sh}\frac{x}{a} - \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} + C$

$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sh}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sh}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + C$

[6] : $I = \int \sin\sqrt{x}\, dx$

نجري تغيير المتحول بوضع $t = \sqrt{x}$ نربع الطرفين

$\Rightarrow x = t^2 \qquad \Rightarrow dx = 2t\, dt$

$\Rightarrow I = \int \sin t\, 2t\, dt = 2\underbrace{\int \sin t \cdot t\, dt}_{I'}$

Scanned by CamScanner

Subject الصفحة السادسة التاريخ :
Date الموضوع :

نستخدم التكامل بالتجزئة

نفرض $u = t \Leftarrow du = dt$

$dv = \sin t \, dt \Leftarrow v = -\cos t$

$\Rightarrow I = 2I' = 2\int \sin t . t \, dt$

$I' = -\cos t \, t - \int$ ~~sint~~ $-\cos t \, dt$

$= -\cos t . t + \sin t + C$

$\Rightarrow I = -2\cos t . t + 2\sin t + C$

$= -2\cos\sqrt{x} . \sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$

[7]. $I = \int e^{\sin x} . \sin 2x \, dx$

نعلم أن $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow I = 2\int e^{\sin x} . \sin x . \cos x \, dx$

~~نفرض ...~~

$I = +2\int e^{\sin x} . \sin x . (+\cos x) \, dx$

نجري تغير المتحول

نفرض $\sin x = t \Leftarrow dt = \cos x \, dx$

نعوض

Scanned by CamScanner

Subject

Date

التــاريخ :

الموضــوع :

$\Rightarrow I = 2 \int e^{t} . t \; dt$

نستخدم التكامل بالتجزئة

نفرض $u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = e^{t} \, dt \Rightarrow V = e^{t}$

$\Rightarrow I' = t.e^{t} - \int e^{t} \, dt$

$= t.e^{t} - e^{t} + C$

ونفرض أن $t = \sin x$

$I' = \sin x \, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C$

$\Rightarrow I = 2I' = 2\sin x \, e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C$